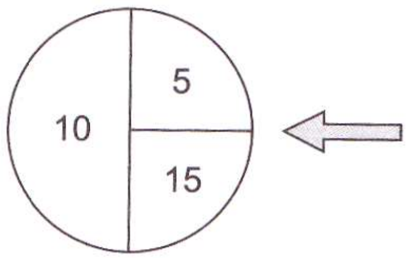
Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Ebola Virus) 11
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) a) Gib die erste Ableitung von $f(x) = (3x^2 - x) \cdot \sin(x)$ an.

b) Berechne das Integral $\int_1^2 (2x-2)^3 \, dx$. (4VP)

2) Das nebenstehende Glücksrad wird zweimal gedreht.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A: „Es erscheint immer die Zahl 10“
B: „Genau einmal erscheint eine ungerade Zahl“
C: „Die Summe der Zahlen ist höchstens 20“ (3VP)



3) Ein idealer Würfel wird dreimal geworfen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei dreimal die gleiche Augenzahl?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens einmal eine Augenzahl größer als 4 zu würfeln? (2VP)

4) Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 0, 2, 6 und 10 an.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X ist durch die folgende Tabelle gegeben:

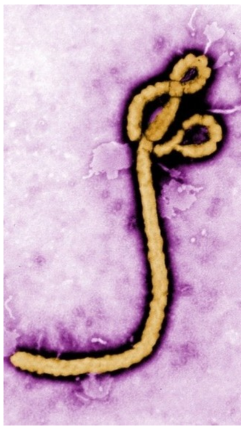
x_i	0	2	6	10
$P(X = x_i)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Bestimme den Wert für a und den Erwartungswert $E(X)$. (2VP)

5) Bei einem Glücksspiel wird eine ideale Münze geworfen.
Liegt nach einem Wurf Wappen oben, so endet das Spiel.
Andernfalls wird die Münze wieder geworfen, jedoch höchstens dreimal.
Als Gewinn erhält man:
1€ bei Wappen im ersten Wurf;
2€ bei Wappen im zweiten Wurf;
4€ bei Wappen im dritten Wurf.
a) Zeichne ein Baumdiagramm für dieses Glücksspiel.
b) Der Einsatz bei dem Spiel beträgt 1,50€. Ist das Spiel fair? (4VP)

Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Ebola Virus) 11

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)



Aufgabe 1

Ein neues Medikament gegen Ebola heilt nach Herstellerangaben mit einer Wahrscheinlichkeit von 85%. Eine Gruppe von 100 erkrankten Patienten erhält das Medikament.

a) (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden
(A) genau 80,
(B) mindestens 40 und höchsten 90
(C) mindestens 85
Patienten dieser Gruppe geheilt?
(2) Berechne den Erwartungswert für die Anzahl der geheilten Patienten. (5VP)

b) Wie groß muss eine Gruppe von Patienten mindestens sein, damit mit 99% Wahrscheinlichkeit mindestens 40 Patienten geheilt werden? (3VP)

c) Der Anteil der mit Ebola infizierten Personen, bei denen die Krankheit aber noch nicht ausgebrochen ist beträgt in einer Region des Landes Liberia 5%. Mit einem neu entwickelten Bluttest kann man das Virus sicher nachweisen. Er soll bei einer Reihenuntersuchung eingesetzt werden, um die Krankheit bereits vor Ausbruch zu diagnostizieren. Um die Zahl der teuren Tests möglichst klein zu halten, wird dabei das Blut von 20 Personen gemischt und untersucht. Nur wenn sich dabei das Virus nachweisen lässt, wird das Blut jeder der 20 Personen noch einmal einzeln untersucht.
(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur ein einziger Test notwendig ist, also alle 20 Personen gesund sind?
(2) Mit wie vielen Tests muss man durchschnittlich bei einer Gruppe von 20 Personen rechnen? (4VP)

Aufgabe 2

Der Temperaturverlauf an einem Wintertag in Freiburg kann durch die Funktion

$$f(t) = -\frac{1}{240}t^3 + \frac{1}{10}t^2 - \frac{7}{10}t + 1$$

(f(t) in Grad Celsius, t in Stunden ab 0 Uhr)

beschrieben werden.
Bestimme die mittlere Temperatur für den gesamten Wintertag. (3VP)

Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Ebola Virus)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x) = (6x-1)\cdot \sin x + (3x^2 - x)\cdot \cos x$ (2P)

b) $\int_1^2 (2x-2)^3 dx = \left[\frac{1}{4}(2x-2)^4 \cdot \frac{1}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{8}2^4 - \frac{1}{8}0^4 = \frac{16}{8} = \boxed{2}$ (2P) **4P**

2) a) $P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$ (1P)

b) $P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$ (1P)

c) $P(C) = 1 - (P(15,10) + P(10,15) + P(15,15) = 1 - \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)$

$= 1 - \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{16}\right) = 1 - \frac{5}{16} = \boxed{\frac{11}{16}}$ (1P) **3P**

3) a) A: Dreimal gleiche Augenzahl: $P(A) = 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{36}}$ (1P)

b) B: Mindestens einmal Augenzahl größer als 4

$\overline{B}$: Jede der drei gewürfelten Augenzahlen ist kleiner oder gleich 4

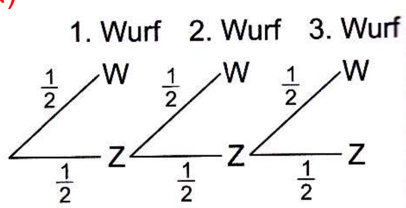
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \boxed{\frac{19}{27}}$ (1P) **2P**

4) Die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte von X müssen addiert den Wert 1 ergeben:

$a + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow a + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{6}}$ (1P)

$E(X) = 0\cdot a + 2\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{10}{4} = \frac{8}{12} + \frac{18}{12} + \frac{30}{12} = \frac{56}{12} = \boxed{\frac{14}{3}}$ (1P) **2P**

5) a)



(1,5P)

b) X = Gewinn des Spielers ohne Einsatz

x_i	0€ (ZZZ)	1€ (W)	2€ (ZW)	4€ (ZZW)
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = 0€\cdot\frac{1}{8} + 1€\cdot\frac{1}{2} + 2€\cdot\frac{1}{4} + 4€\cdot\frac{1}{8} = 1{,}50€$ (2P)

Spiel ist also fair, da Einsatz auch 1,50€. (0,5P) **4P**

Summe: 15 Punkte

Lösungen Wahlteil:

Aufgabe 1

a) (1) X = Anzahl der geheilten Patienten, X ist $B(100;0,85)-$ verteilt.

$P(A)=P(X=80)=\boxed{0,0402}$ (1P)

$P(B)=P(40\le X\le 90)=P(X\le 90)-P(X\le 39)=\boxed{0,945}$ (1,5P)

$P(C)=P(X\ge 85)=1-P(X\le 84)=\boxed{0,568}$ (1,5P)

(2) $E(X)=n\cdot p=100\cdot 0,85=\boxed{85}$ (1P) **5P**

b) (1) X = Anzahl der geheilten Patienten, X ist $B(n;0,85)-$ verteilt.

$P(X\ge 40)\ge 0,99 \Leftrightarrow 1-P(X\le 39)\ge 0,99 \Leftrightarrow P(X\le 39)\le 0,01$

n	$P(X=0)$
54	0,01132
55	0,0056

Es müssen mindestens 55 Patienten in der Gruppe sein. **3P**

c) (1) X = Anzahl der mit dem Virus infizierten Personen. X ist $B(20;0,05)-$verteilt.

$P(X=0)=\boxed{0,358}$

Mit 35,8% Wahrscheinlichkeit muss nur 1 Test durchgeführt werden. (2P)

(2) Entweder wird nur 1 Test durchgeführt (mit Wahrscheinlichkeit 35,8%) oder es werden insgesamt 21 Test durchgeführt (mit Wahrscheinlichkeit $1-P(X=0)=0,642=64,2\%$)

Z = Anzahl der Tests für 20 Personen

$E(Z)=1\cdot 0,358+21\cdot 0,642=\boxed{13,84}$

Man muss durchschnittlich mit etwa 14 Tests pro Gruppe rechnen. (2P) **4P**

Aufgabe 2

$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)dt=\frac{1}{24}\cdot(-62,4)=-2,6\Rightarrow \boxed{-2,6°C}$ **3P**

Summe: 15 Punkte